

# Bachelorarbeit in Theoretischer Physik:

## Selbst-adjungierte Energie- und Impuls-Operatoren im Interval und auf der Halbachse

### Kurzbeschreibung

Dieses Thema ist eher mathematischer Natur, obwohl keine rigorosen Beweise geführt, sondern viel mehr physikalisch relevante Konzepte der theoretischen Physik erlernt werden sollen. Es vertieft das Vorwissen der Quantentheorie aus dem Bachelorstudium, berührt aber noch nicht die Quantenfeldtheorie, die im Masterstudium der theoretischen Physik eine zentrale Rolle spielt.

In der Quantentheorie werden observable Grössen durch selbst-adjungierte Operatoren beschrieben. Diese besitzen ein Spektrum von reellen Eigenwerten mit dazu gehörenden orthonormierten Eigenfunktionen. Allerdings gibt es subtile aber wichtige Unterschiede zwischen Selbst-adjungiertheit und Hermitezität, die in der physikalischen Lehrbuchliteratur nur selten hervorgehoben werden. Insbesondere wirken die physikalisch wichtigen Operatoren  $A$  in der Regel nicht im ganzen Hilbertraum sondern nur in einer eingeschränkten Domäne  $D(A)$  desselben. Die Domänen resultieren in der Regel aus Quadrat-Integrabilitätsbedingungen an Ableitungen der Wellenfunktion sowie aus deren Randbedingungen. Während Hermitezität folgt wenn die Wirkung eines Operators  $A$  mit der des Hermitesch konjugierten Operators  $A^\dagger$  übereinstimmt, erfordert Selbst-adjungiertheit zusätzlich die Übereinstimmung der entsprechenden Domänen,  $D(A^\dagger) = D(A)$ .

Die damit verbundenen Fragen stellen sich bereits für ein einzelnes quantenmechanisches Teilchen, das sich in einem 1-dimensionalen Interval oder entlang der positiven reellen Achse bewegt. In diesem Zusammenhang stellen sich unter Anderem die folgenden Fragen:

- Was sind in diesen Situationen die allgemeinst möglichen Randbedingungen?
- Wie gross ist die entsprechende Familie der selbst-adjungierten Erweiterungen des Operators der kinetischen Energie und was sind die dazu gehörenden Spektren und Eigenfunktionen?
- Unter welchen Umständen ist der übliche Impulsoperator Hermitesch bzw. selbst-adjungiert?
- Wie kann der Impulsoperator gegebenenfalls anders definiert werden, damit er eine akzeptable physikalische Observable repräsentiert, und was sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte, die aus einer entsprechenden Impulsmessung resultieren können?
- Wie muss die Heisenbergsche Unschärferelation verallgemeinert werden, damit sie auch in einem endlichen Volumen gültig bleibt?

Die vorletzte dieser Fragen wurde erst vor Kurzem gelöst und es bleibt noch Vieles zu berechnen und zu verstehen. In diesem Sinne ist diese Bachelorarbeit an der vordersten Front der Forschung (an einem allerdings zur Zeit nicht mehr sehr populären Gebiet) der theoretischen Physik angesiedelt. Hier ist aus diesem Grunde eine besonders hohe Einsatzbereitschaft gefragt.

## Voraussetzungen

Dieses Thema setzt Vorkenntnisse aus der Quantenmechanik voraus.

## Aufgabe

Die physikalisch relevanten Aspekte der Theorie der selbst-adjungierten Erweiterungen Hermitescher Operatoren sollen an Hand von Energie und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens auf einem endlichen Intervall sowie auf der positiven Halbachse erarbeitet werden. Dabei ist das Ziel, die oben aufgelisteten Fragen zu beantworten. Eventuell sollen auch Erweiterungen auf höhere Dimensionen betrachtet werden.

## Ansprechpartner

Uwe-Jens Wiese, Raum 122, Tel.: 031 631 8504, wiese@itp.unibe.ch